Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 2 MIASHS

Espaces euclidiens

Controle continu, le 19 novembre 2024, 13h30–14h00

Documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1. Soit B la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbf{R}^3$ définie par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la forme quadratique Q associée à B (inutile de détailler les calculs).

Exercice 2. Soit Q la forme quadratique sur $\mathbf{R}^3$ définie par

$$Q(x,y,z) = -x^2 + 3xy - 2xz + yz + z^2.$$

Déterminer la matrice de la forme bilinéaire symétrique B associée à Q (inutile de détailler les calculs).

Exercice 3. Soit Q la forme quadratique sur $\mathbf{R}^3$ définie par

$$Q(x,y,z) = xy + 2xz - 3yz - 5z^2.$$

a. Diagonaliser Q, c-à-d, déterminer une forme quadratique Q' de la forme
$$Q'(x',y'z') = \lambda(x')^2 + \mu(y')^2 + \nu(z')^2,$$
avec $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}$, et une matrice inversible M telles que
$$Q(x,y,z) = Q'(M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}).$$

b. En déduire une base de $\mathbf{R}^3$, orthogonale par rapport à la forme quadratique Q.